Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques : analyse et approches
Niveau supérieur
Épreuve 2

9 mai 2023

Zone A après-midi | **Zone B** matin | **Zone C** après-midi

Numéro de session du candidat

2 heures

Instructions destinées aux candidats

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d'examen et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques : analyse et approches** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[110 points]**.

2223 – 7117

15 pages

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

Section A

Répondez à **toutes** les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

1. [Note maximale : 4]

Un botaniste mène une expérience qui étudie la croissance des plantes.

Les hauteurs des plantes sont mesurées lors de sept jours différents.

Le tableau suivant indique le nombre de jours, d, écoulés depuis le début de l'expérience et la hauteur moyenne, $h\,\text{cm}$, des plantes à chacun de ces jours.

Nombre de jours (d)	2	5	13	24	33	37	42
Hauteur moyenne (h)	10	16	30	59	76	79	82

La valeur du coefficient de corrélation de Pearson, r, pour ces données est de $0{,}991$, donnée avec une précision de trois chiffres significatifs.

(a) La droite de régression de h en fonction de d pour ces données peut être écrite sous la forme $h = ad + b$.

Trouvez la valeur de a et la valeur de b. [2]

(b) Utilisez votre droite de régression pour estimer la hauteur moyenne des plantes lorsque 20 jours se sont écoulés depuis le début de l'expérience. [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

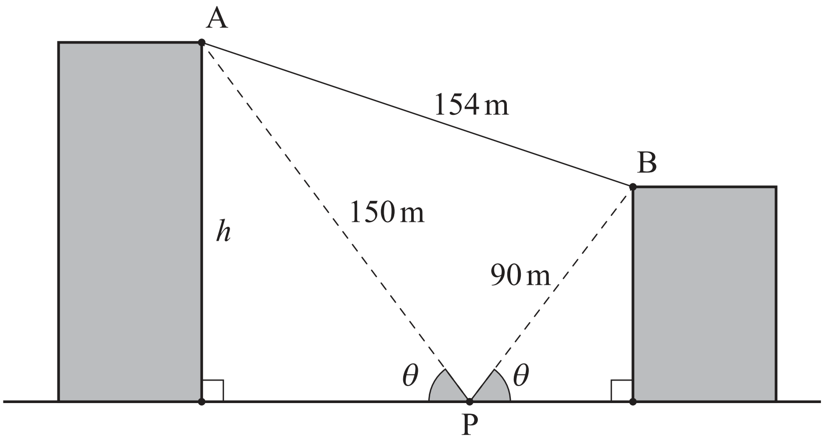
. . . .

2. [Note maximale : 6]

Le diagramme suivant montre deux bâtiments situés sur un terrain plat.

À partir du point P situé au niveau du sol entre les deux bâtiments, l'angle d'élévation au sommet de chaque bâtiment est θ.

la figure n'est pas à l'échelle



La distance du point P au point A situé au sommet du plus grand bâtiment, est de 150 mètres.

La distance du point P au point B situé au sommet du plus petit bâtiment, est de 90 mètres.

La distance entre A et B est 154 mètres.

Trouvez la hauteur, h, du plus grand bâtiment.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. [Note maximale : 8]

Les poids, W grammes, de sacs de riz emballés dans une usine peuvent être modélisés par une distribution normale dont la moyenne est de 204 grammes et l'écart type est de 5 grammes.

(a) Un sac de riz est choisi au hasard.

Trouvez la probabilité qu'il pèse plus de 210 grammes. [2]

Selon ce modèle, $80\,\%$ des sacs de riz pèsent entre w grammes et 210 grammes.

(b) Trouvez la probabilité qu'un sac de riz choisi au hasard pèse moins de w grammes. [2]

(c) Trouvez la valeur de w. [2]

(d) Dix sacs de riz sont choisis au hasard.

Trouvez la probabilité qu'exactement un de ces sacs pèse moins de w grammes. [2]

4. [Note maximale : 7]

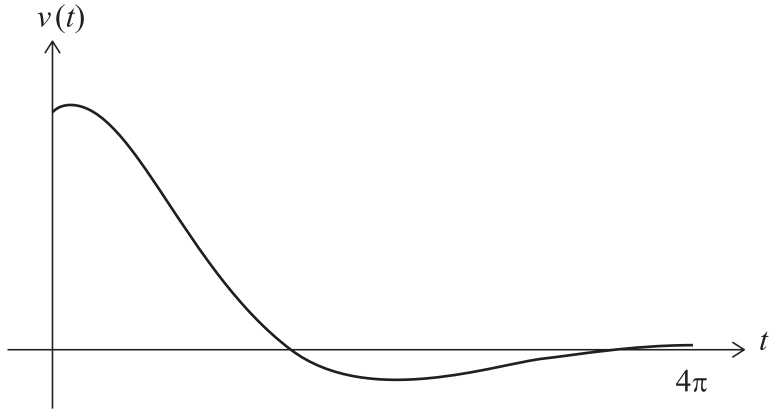
Le développement de $(x+h)^8$, où $h \in \mathbb{Q}^+$, peut s'écrire comme $x^8 + ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + ... + h^8$, où a, b, c, d, ... $\in \mathbb{R}$.

Sachant que les coefficients, a, b et d, sont les trois premiers termes d'une suite géométrique, trouvez la valeur de h.

5. [Note maximale : 6]

Une particule se déplace en ligne droite de sorte que sa vitesse, $v\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$, au temps t secondes est donnée par $v(t) = 4\text{e}^{-\frac{t}{3}}\cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$, pour $0 \le t \le 4\pi$.

La représentation graphique de v est illustrée dans le diagramme suivant.



Soit t_1 le premier instant où l'**accélération** de la particule est nulle.

(a) Trouvez la valeur de t_1. [2]

Soit t_2 le **deuxième** instant où la particule est au repos.

(b) Trouvez la valeur de t_2. [2]

(c) Trouvez la distance parcourue par la particule entre $t = t_1$ et $t = t_2$. [2]

6. [Note maximale : 8]

Considérez les deux plans

$$\Pi_1 : 2x - y + 2z = 6$$

$$\Pi_2 : 4x + 3y - z = 2$$

Soit L la droite d'intersection de Π_1 et Π_2.

(a) Vérifiez que $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$, est une équation vectorielle de L. [3]

(b) Trouvez les coordonnées du point P, situé sur L, qui est le plus près de l'origine. [5]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

7. [Note maximale : 5]

Une fonction f est définie par $f(x) = \arctan(x-2)$, où $2 \leq x \leq 2+\sqrt{3}$.

La région délimitée par la courbe, l'axe des ordonnées, l'axe des abscisses et la droite $y = \dfrac{\pi}{3}$ subit une rotation de 360° autour de l'axe des ordonnées pour former un solide de révolution.

Trouvez le volume de ce solide.

8. [Note maximale : 7]

Une fonction g est définie par $g(x)=\frac{2x-5}{x^2-3}$, où $x\in\mathbb{R}$, $x\neq\pm\sqrt{3}$.

(a) Déterminez l'image de g. [4]

Une fonction h est définie par $h(x)=g(|x|)\cos t$, où $x\in\mathbb{R}$, $x\neq\pm\sqrt{3}$ et t est une constante telle que $\frac{\pi}{2}<t\leq\pi$.

(b) Trouvez l'ensemble de valeurs de x telles que $h(x)\leq 0$. [3]

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page ne seront pas corrigées.

9. [Note maximale : 5]

Soit S l'ensemble de 30 entiers positifs $\{1, 2, 3, ..., 28, 29, 30\}$.

Déterminez le nombre total de façons dont Raghu peut obtenir une somme qui est divisible par 3.

Vous pouvez considérer que l'ordre n'est pas important. Par exemple, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 2\}$, $\{2, 3, 1\}$, $\{2, 1, 3\}$, $\{3, 1, 2\}$ et $\{3, 2, 1\}$ sont tous considérés comme étant la même sélection. [5]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

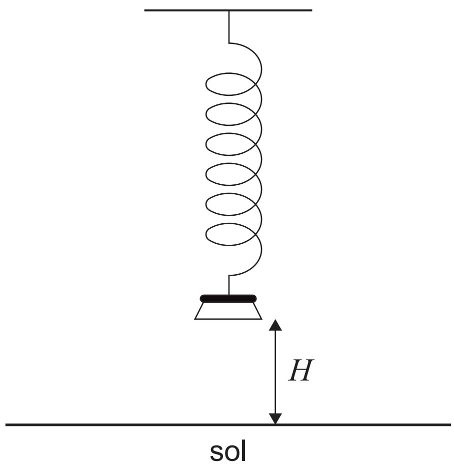
Section B

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

10. [Note maximale : 13]

Un poids suspendu à un ressort est tiré vers le bas et relâché, de sorte qu'il monte et descende verticalement.

La hauteur, H mètres, de la base du poids au-dessus du sol peut être modélisée par la fonction $H(t) = a\cos(7{,}8t) + b$, pour a, $b \in \mathbb{R}$ et $0 \le t \le 10$, où t est le temps en secondes après que le poids a été relâché.



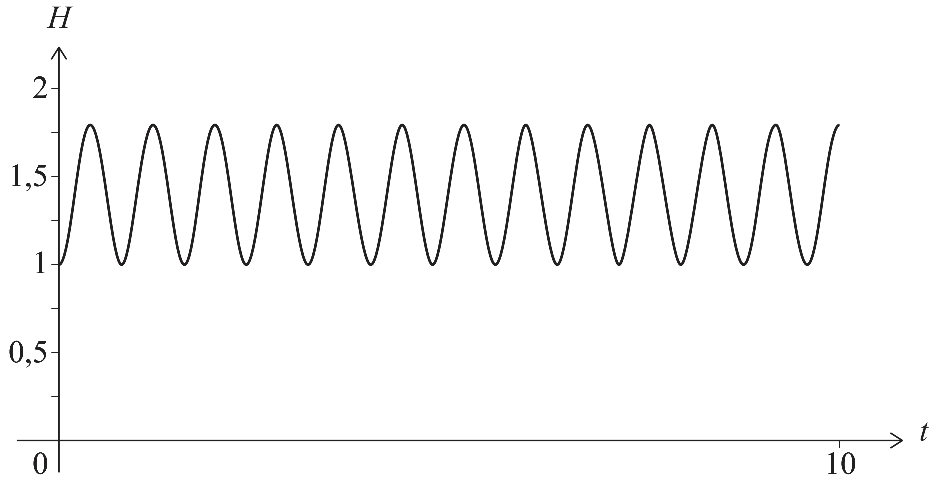
(a) Trouvez la période de la fonction. [2]

(Suite de la question à la page suivante)

N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

(Suite de la question 10)

Le poids est relâché lorsque sa base est à une hauteur minimale de 1 mètre au-dessus du sol, et il atteint une hauteur maximale de $1{,}8$ mètres au-dessus du sol. La représentation graphique de H est montrée dans le diagramme suivant.



(b) Trouvez la valeur de

(i) a ;

(ii) b. [3]

(c) Trouvez le nombre de fois que le poids atteint sa hauteur maximale au cours des cinq premières secondes de son mouvement. [2]

(d) Trouvez la première fois que la base du poids atteint une hauteur de $1{,}5$ mètres. [2]

Une caméra est réglée pour prendre une photo du poids à un instant aléatoire au cours des cinq premières secondes de son mouvement.

(e) Trouvez la probabilité que la hauteur de la base du poids soit supérieure à $1{,}5$ mètres à l'instant où la photo est prise. [4]

N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

11. [Note maximale : 20]

Un jeu de hasard consiste à tirer **deux** boules au hasard et sans remise d'une boîte. La boîte contient initialement r boules rouges et y boules jaunes.

Soit $\mathrm{P}(YY)$ la probabilité de tirer deux boules jaunes de la boîte sans remise.

Considérez une version de ce jeu où l'on sait que $\mathrm{P}(YY) = \frac{1}{3}$.

(a) Montrez que $2y^2 - 2(r+1)y + r - r^2 = 0$. [4]

(b) En résolvant l'équation de la partie (a), montrez que $y = \frac{(r+1) + \sqrt{3r^2+1}}{2}$. [4]

(c) Trouvez deux paires de valeurs pour r et y qui satisfont la condition $\mathrm{P}(YY) = \frac{1}{3}$. [4]

Considérez maintenant un jeu de hasard similaire qui consiste à tirer **trois** boules sans remise d'une boîte. La boîte contient initialement 10 boules rouges et y boules jaunes.

Soit $\mathrm{P}(YYY)$ la probabilité de tirer trois boules jaunes de la boîte sans remise.

(d) Trouvez une expression pour $\mathrm{P}(YYY)$ en fonction de y. [3]

Une boule jaune est ajoutée de sorte que la boîte contient maintenant 10 boules rouges et $(y+1)$ boules jaunes. La probabilité de tirer trois boules jaunes de la boîte sans remise est maintenant le double de la probabilité exprimée dans la partie (d).

(e) Trouvez le nombre initial de boules jaunes dans la boîte. [5]

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

12. [Note maximale : 21]

Considérez l’équation différentielle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2 + 3y^2}{xy}$, où $x > 0$, $y > 0$.

On sait que $y = 2$ lorsque $x = 1$.

(a) Utilisez la méthode d’Euler avec un pas de longueur $0{,}1$ pour trouver une valeur approximative de y lorsque $x = 1{,}1$. [2]

(b) En résolvant l’équation différentielle, montrez que $y = x\sqrt{\frac{9x^4 - 1}{2}}$. [8]

(c) Trouvez la valeur de y lorsque $x = 1{,}1$. [1]

(d) En faisant référence à la concavité de la représentation graphique de $y = x\sqrt{\frac{9x^4 - 1}{2}}$ pour $1 \le x \le 1{,}1$, expliquez pourquoi la valeur de y trouvée dans la partie (c) est supérieure à la valeur approximative de y trouvée dans la partie (a). [2]

La représentation graphique de $y = x\sqrt{\frac{9x^4 - 1}{2}}$ pour $\frac{\sqrt{3}}{3} < x < 1$ a un point d’inflexion au point P.

(e) En esquissant la représentation graphique d’une dérivée appropriée de y, déterminez l’abscisse de P. [2]

On peut démontrer que $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{-x^4 + x^2y^2 + 6y^4}{x^2y^3}$, où $x > 0$, $y > 0$.

(f) Utilisez cette expression pour $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ pour montrer que le point P se situe sur la droite $y = mx$ où la valeur exacte de m est à déterminer. [6]

Références :

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.